www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNEE 1989

DEUXIEME EPREUVE A OPTION *(Durée : 4 h 00 - Cœfficient : 10)*

MATHEMATIQUES - M

Ce sujet est réservé aux candidats ayant choisi l'option M lors du dépôt de candidature. Le changement d'option n'est pas autorisé.

Les parties II, III et IV du problème sont indépendantes

—==oOOo==—

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

—==oOOo==—

On identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, $(n > 1)$, avec l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et une colonne.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{R}$ et I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.

Pour une matrice carrée A, d'ordre n, on note :

A_{ij} le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de A,

$A_{.j}$ la j-ième colonne de A.

Soient $\text{orth}_n = \{Q \in M_n(\mathbb{R}) / (Q_{.1}, \ldots, Q_{.n}) \text{ soit orthonormée}\}$

$\text{tsup}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / A_{ij} = 0 \quad \text{si } i>j\}$

$\text{tsup}^*_n = \{A \in \text{tsup}_n / A_{ii} \neq 0 \quad \text{pour } i = 1..n\}$

$\text{tsup}^{+*}_n = \{A \in \text{tsup}_n / A_{ii} > 0 \quad \text{pour } i = 1..n\}$

$\text{tsup}^+_n = \{A \in \text{tsup}_n / A_{ii} \geqslant 0 \quad \text{pour } i = 1..n\}$

$\text{tsup}0_n = \{A \in \text{tsup}_n / A_{ii} = 0 \quad \text{pour } i = 1..n\}$

$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ étant muni du produit scalaire pour lequel cette base est orthonormée.

On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u et v, et $\|u\|$ la norme de u.

On dit d'une matrice symétrique S de $M_n(\mathbb{R})$ qu'elle est définie positive lorsque la forme quadratique associée (dans la base canonique) $\Phi : X \longmapsto {}^tXSX$ (où X désigne un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$) est définie positive.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on dit que A admet une décomposition Q R s'il existe $R \in \text{tsup}^+_n$ et $Q \in \text{orth}_n$ telles que $A = Q\,R$.

I.- EXISTENCE D'UNE DECOMPOSITION Q R.

I.1./

a) Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe une base orthonormée $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$\forall\, i \in \{1, .., n\}$, Vect $(x_1, \ldots, x_i) =$ Vect $(y_1, \ldots, y_i)$.

b) Soit $(y_1, y_2, .., y_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, telle que :

$\forall\, i \in \{1, .., n\}$, Vect $(e_1, \ldots, e_i) =$ Vect $(y_1, \ldots, y_i)$.

Montrer que $\forall\, i \in \{1, .., n\}$, $y_i = e_i$ ou $y_i = -e_i$.

I.2./ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, inversible.

a) Montrer qu'il existe $Q \in \text{orth}_n$ et $R \in \text{tsup}^*_n$ telles que $A = Q\,R$.

b) Montrer que A peut s'écrire $A = Q\,R$, avec $Q \in \text{orth}_n$ et $R \in \text{tsup}^{+*}_n$.

c) Montrer que si $A \in \text{tsup}^*_n$ et que $A = Q\,R$ avec $Q \in \text{orth}_n$ et $R \in \text{tsup}_n$, alors Q est diagonale.

d) Montrer que A s'écrit de façon unique sous la forme A = Q R, avec $Q \in orth_n$ et $R \in tsup_n^{+*}$.

e) Soient $y \in \mathbb{R}^n$ et $A = Q\,R$ avec $Q \in orth_n$ et $R \in tsup_n^{*}$.

Déterminer un système triangulaire, équivalent au système $A\,X = Y$, d'inconnue X.

I.3./ Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, Vect $(x_1, \ldots, x_i) \subset$ Vect $(y_1, \ldots, y_i)$.

b) Montrer que si A est une matrice quelconque alors il existe $Q \in orth_n$ et $R \in tsup_n$ telles que $A = Q\,R$.

c) Montrer que A peut s'écrire $A = Q\,R$ avec $Q \in orth_n$ et $R \in tsup_n^{+}$.

Cette écriture est-elle unique ?

II.- DECOMPOSITION Q R PAR IDENTIFICATION

II.1./ Soit $R \in tsup_n^{+*}$.

Montrer que ${}^tR\,R$ est une matrice symétrique, définie, positive.

II.2./ Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$, symétrique, définie, positive, de la forme

$$S = \left[\begin{array}{c|c} {}^tM\,M & u \\ \hline {}^tu & a \end{array}\right] \quad \text{avec } M \in tsup_{n-1}^{+*},\ u \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } a \in \mathbb{R}.$$

a) Soit $X = \begin{bmatrix} B\,u \\ -1 \end{bmatrix}$ avec $B = ({}^tM\,M)^{-1}$.

Calculer $\langle S\,X, X\rangle$.

b) Montrer qu'il existe une seule matrice R, de la forme

$$R = \left[\begin{array}{c|c} M & l \\ \hline (0) & b \end{array}\right] \quad \text{avec } l \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } b \in \mathbb{R},\ b>0,$$

vérifiant l'égalité : $S = {}^tR\,R$.

II.3./ S étant une matrice symétrique, définie, positive, montrer que l'équation ${}^tR\,R = S$ admet une solution unique dans $tsup_n^{+*}$.

II.4./ Soit la matrice $T = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 6 & 10 & 7 \\ 4 & 7 & 4 \end{bmatrix}$.

Résoudre, dans $tsup_3^{+*}$, l'équation ${}^tR\,R = T$.

II.5./ Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Résoudre dans $tsup_3^{+*}$, l'équation ${}^tR\,R = {}^tA\,A$.

b) En déduire la décomposition Q R de A.

III.- DECOMPOSITION Q R PAR UNE SUITE FINIE DE TRANSFORMATION

III.1./ Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$, inversible, telle que $(B_{.1}, \ldots, B_{.k})$ soit orthogonale.

Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$, définie par :

$$\begin{cases} \text{pour } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ et } i \neq k+1,\ H_{.i} = e_i \\ H_{.k+1} = e_{k+1} + h_1 e_1 + \ldots + h_k e_k, \text{ avec } h_1, \ldots, h_k \text{ réels.} \end{cases}$$

On pose $C = B\,H$.

T.S.V.P.

a) Montrer que pour $i \neq k+1$, $C_{.i} = B_{.i}$.

b) Montrer que l'on peut choisir, et ce d'une seule façon, les coefficients $h_1, h_2, \ldots, h_k$ tels que $(C_{.1}, C_{.2}, \ldots, C_{.k+1})$ soit orthogonale.

III.2./ Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, inversible.

a) Montrer que pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, i fixé, il existe H et B, dans $M_n(\mathbb{R})$, telles que $B = A\,H$, avec $(B_{.1}, \ldots, B_{.i})$ orthogonale et

$$H = \left[\begin{array}{c|c} I_i + R_i & (0) \\ \hline (0) & I_{n-i} \end{array}\right] \text{ où } R_i \in \text{tsup}0_i \text{ , si } i<n.$$

ou

$H = I_n + R_n$, où $R_n \in \text{tsup}0_n$, si $i = n$.

b) Soit $H = I_n + R_n$, avec $R_n \in \text{tsup}0_n$, telle que $B = A\,H$ ait ses colonnes orthogonales.

En déduire la décomposition Q R de A.

IV.- DECOMPOSITION Q R PAR DES MATRICES DE SYMETRIES

IV.1./ Pour u, vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, on pose $H = I_n - 2\,u\,{}^t u$.

a) Montrer que H est symétrique et orthogonale.

b) Montrer que -1 est valeur propre simple de H.

c) Calculer det H.

IV.2./ Soit n un entier naturel quelconque (n>1) et v dans $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que e_1 désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si v est colinéaire à e_1, on pose $H_n(v) = I_n$,

si v est non colinéaire à e_1, on pose $H_n(v) = I_n - 2\,u\,{}^t u$,

$$\text{avec } u = \frac{v - \|v\|\, e_1}{\left\| v - \|v\|\, e_1 \right\|} .$$

Calculer $H_n(v)\ v$ (on vérifiera que ce vecteur est colinéaire à e_1).

IV.3./ On se place ici dans $\mathbb{R}^3$, la base (e_1, e_2, e_3) étant directe.

a) Soit M une matrice de symétrie orthogonale plane.

Montrer qu'il existe un vecteur unitaire u tel que :

$$M = I - 2u\,{}^t u.$$

b) Soient u et v deux vecteurs unitaires.

Montrer que $(I - 2v\,{}^t v).(I - 2u\,{}^t u)$ est une matrice de rotation dont on précisera l'axe et l'angle.

c) Soit R une matrice de rotation.

Montrer qu'il existe u et v unitaires tels que :

$$R = (I - 2v\,{}^t v).(I - 2u\,{}^t u).$$

Cette décomposition est-elle unique ?

d) Soit la rotation d'axe orienté par le vecteur unitaire w et d'angle θ.

On appelle R la matrice de cette rotation, relativement à la base canonique.

Soit u un vecteur unitaire orthogonal à w.

Déterminer un vecteur unitaire v tel que :

$$R = (I - 2v\,{}^tv).(I - 2u\,{}^tu).$$

e) Ecrire, relativement à la base canonique, la matrice de la rotation d'axe orienté par $W = e_1 + 2e_2 - e_3$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

f) Soient deux vecteurs unitaires u_1 et u_2 engendrant le plan (P).

Déterminer la matrice de la rotation laissant (P) invariant et transformant u_1 en u_2.

IV.4./ n est à nouveau quelconque (n>1) et on reprend la notation du IV.2./.

A est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $B = H_n(A_{.1})\,A$.

Calculer $B_{.1}$.

b) Soit $C \in M_n(\mathbb{R})$, inversible, de la forme :

$$C = \left[\begin{array}{c|c} R_p & X \\ \hline (0) & V \end{array}\right] \text{ où } 0<p<n,\ R_p \in \text{tsup}^*_p,\ V \in M_{n-p}(\mathbb{R}).$$

On pose :

$$H = \left[\begin{array}{c|c} I_p & (0) \\ \hline (0) & W \end{array}\right] \text{ où } W = H_{n-p}(V_{.1}).$$

Quelle est la forme de la matrice $D = H\,C$?

c) Montrer qu'il existe une suite finie de matrices $H^{(i)}$, de $M_n(\mathbb{R})$, telle que :

$$R = H^{(n-1)}\,H^{(n-2)} \ldots H^{(2)}\,H^{(1)}A \in \text{tsup}^*_n.$$

En déduire la décomposition Q R de A.

---=ooo=---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail